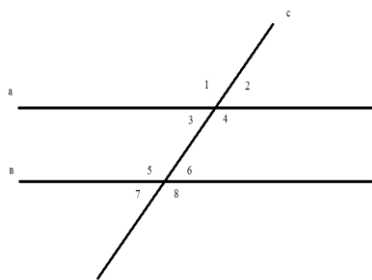


Модуль «Геометрия» (Планиметрия)

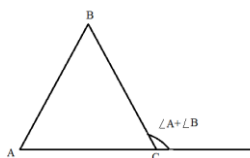


- 1) $(\angle 1, \angle 4)$; $(\angle 2, \angle 3)$; $(\angle 5, \angle 8)$; $(\angle 6, \angle 7)$ - вертикальные углы (всегда равны).
- 2) $(\angle 3, \angle 6)$; $(\angle 5, \angle 4)$ - внутренние накрест лежащие углы (равны если прямые параллельны)
- 3) $(\angle 3, \angle 5)$; $(\angle 4, \angle 6)$ - внутренние односторонние углы (в сумме 180 если прямые параллельны)
- 4) $(\angle 1, \angle 2)$; $(\angle 3, \angle 4)$; $(\angle 1, \angle 3)$; $(\angle 2, \angle 4)$; $(\angle 5, \angle 6)$; $(\angle 7, \angle 8)$; $(\angle 5, \angle 7)$; $(\angle 6, \angle 8)$ - смежные углы (в сумме 180)
- 5) $(\angle 1, \angle 5)$; $(\angle 3, \angle 7)$; $(\angle 2, \angle 6)$; $(\angle 4, \angle 8)$ - соответственные углы (равны если прямые параллельны)

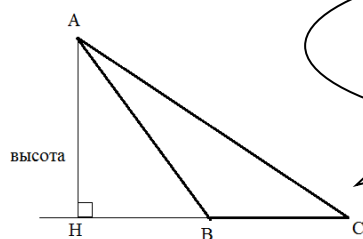
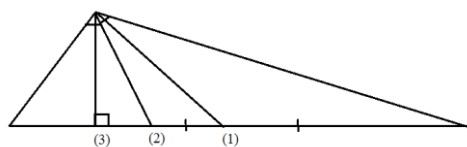
Треугольники

Сумма углов треугольника равна 180°

Внешний угол треугольника – угол смежный с каким-либо углом треугольника. Равен сумме углов треугольника, не смежных с ним

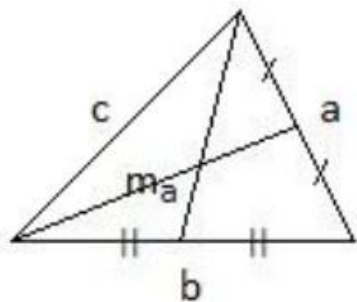


- (1) **Медиана** треугольника – отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны (делит противоположную сторону пополам)
- (2) **Биссектриса** треугольника – отрезок, выходящий из вершины и делящий угол пополам
- (3) **Высота** – выходит из вершины и падает под углом 90 на противоположную сторону (иногда на продолжение противоположной стороны)



Высота падает за пределы треугольника, на продолжение стороны. Это нормально ☺

ПРО МЕДИАНУ

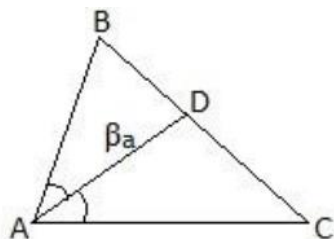


Медианы пересекаются в одной точке и делятся 2:1 считая от вершины

Медиана делит треугольник на два равных по площади треугольника

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \quad \text{- медиана, проведенная к стороне } a$$

ПРО БИСЕКТРИСУ

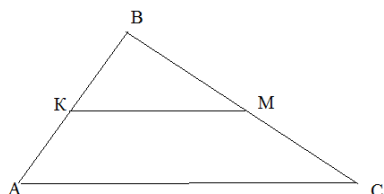


Биссектриса делит противоположную сторону на части, пропорциональные боковым сторонам

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$$

Средняя линия треугольника – отрезок, соединяющий середины двух его сторон (KM)

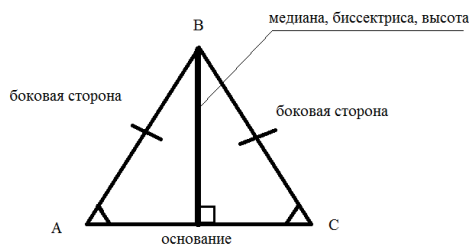
Теорема: Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине.



Равнобедренный треугольник

- треугольник, у которого две стороны равны (боковые стороны), углы при основании равны.

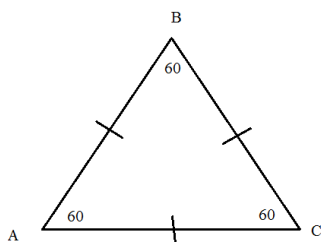
В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота совпадают (если выходят из вершины против основания)



Равносторонний треугольник

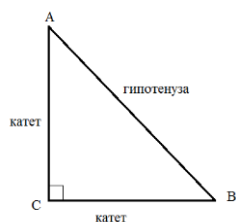
– все стороны равны, все углы равны по 60

В равностороннем треугольнике медиана является биссектрисой и высотой (из любой вершины)



Прямоугольный треугольник

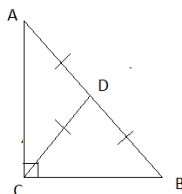
- один из его углов равен 90



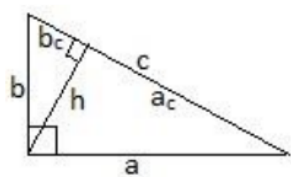
Теорема Пифагора: Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$$AB^2 = CB^2 + AC^2$$

Важно! Если медиана равна половине стороны, которую она делит, то она выходит из вершины прямого угла



Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике



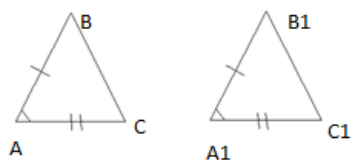
$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

$$a^2 = c \cdot a_c$$

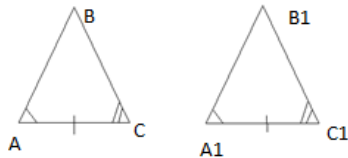
$$b^2 = c \cdot b_c$$

Признаки равенства треугольников

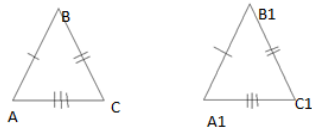
1) По двум сторонам и углу между ними



2) По стороне и прилежащим к ней углам

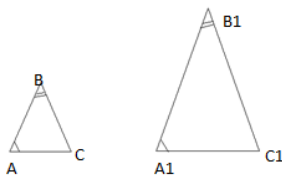


3) По трем сторонам

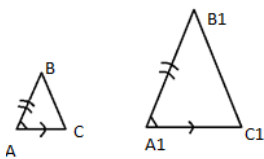


Признаки подобия треугольников

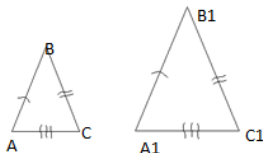
1) По двум равным углам



2) По двум пропорциональным сторонам и равному углу между ними



3) По трем пропорциональным сторонам

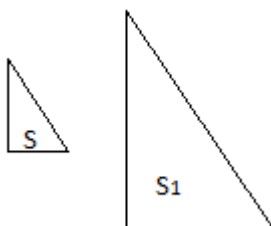


ВАЖНО! Из того что треугольники подобны, следует что их стороны пропорциональны (иными словами если одна сторона больше соответствующей, например, в 2 раза, то и другие стороны тоже больше соответствующих им сторонам в 2 раза)

$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1B_1}{AB} = k$$

Кстати! Удобнее всегда большую сторону делить на меньшую

k- это коэффициент подобия



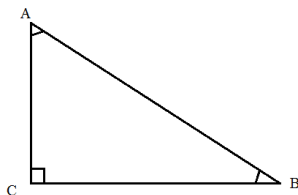
ОЧЕНЬ ВАЖНО!!!

Отношение площадей подобных фигур равно коэффициенту подобия в квадрате

$$\frac{S_1}{S} = k^2$$

(часто встречается в ЕГЭ и ОГЭ)

Соотношение между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике



$$\sin(\text{синус}) = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\cos(\text{косинус}) = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\operatorname{tg}(\text{тангенс}) = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$

$$\operatorname{ctg}(\text{котангенс}) = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежающий катет}}$$

$$\begin{array}{llll} \cos A = \frac{CA}{AB} & \sin A = \frac{CB}{AB} & \operatorname{tg} A = \frac{CB}{CA} & \operatorname{ctg} A = \frac{CA}{CB} \\ \cos B = \frac{CB}{AB} & \sin B = \frac{CA}{AB} & \operatorname{tg} B = \frac{CA}{CB} & \operatorname{ctg} B = \frac{CB}{CA} \end{array}$$

Тригонометрические тождества

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ - основное тригонометрическое тождество

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{tg} x * \operatorname{ctg} x = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Важно! Напротив угла в 30 лежит катет равный половине гипотенузы

Площади и свойства фигур

S = 180 * (n-2) сумма углов выпуклого n-угольника

Для треугольника: S=180*(3-2)=**180**, если все углы равны то каждый угол по 60

Для четырехугольника: S=180*(4-2)=**360**, если все углы равны то каждый угол по 90

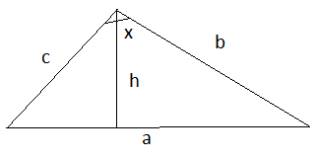
Для 5-угольника: S=180*(5-2)=**540**, если все углы равны то каждый угол по 108

Для 6-угольника: S=180*(6-2)=**720**, если все углы равны то каждый угол по 120

...

1) Треугольник.

$$S = \frac{1}{2}ah$$



$$S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin x$$

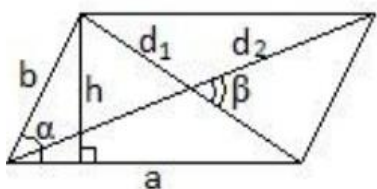
произведение двух сторон на синус угла между ними

Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} - \text{полупериметр}$$

2) Параллелограмм – четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны и равны.



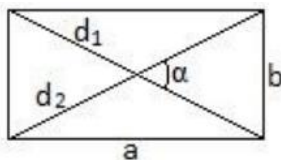
Свойства

- 1) Противоположные стороны равны
- 2) Противоположные углы равны
- 3) Диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам
- 4) Сумма всех его углов равна 360 (сумма смежных углов равна 180)
- 5) Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон
 $(d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2))$

$$S = a \cdot h \text{ (высота, умноженная на сторону к которой высота проведена).}$$

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \beta \quad \text{или} \quad S = ab \sin \alpha$$

3) Прямоугольник – параллелограмм у которого все углы прямые (по 90°)

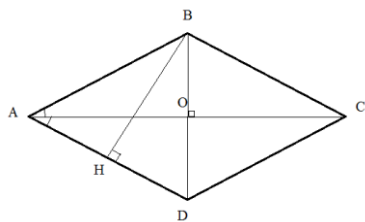


Свойства

Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам

$$S = ab \text{ (произведение сторон) или } S = \frac{1}{2}d^2 \sin \alpha$$

4) **Ромб** – параллелограмм у которого все стороны равны.



Свойства

- Диагонали ромба пересекаются под прямым углом и точкой пересечения делятся пополам
- Диагонали ромба являются биссектрисами его углов
- Сумма квадратов диагоналей равна квадрату стороны умноженному на 4
($AC^2 + BD^2 = 4 \cdot AB^2$)

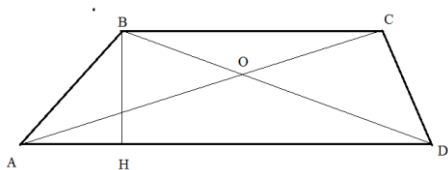
Т.к. ромб – параллелограмм, то:

$$S = BH \cdot AD$$

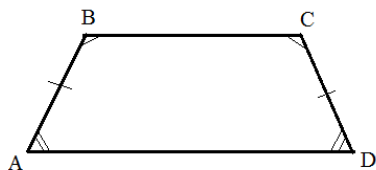
$$S = \frac{BD \cdot AC}{2} \text{ (половина произведения его диагоналей)}$$

$$S = \frac{1}{2} P \cdot r, \quad r - \text{радиус вписанной окружности}$$

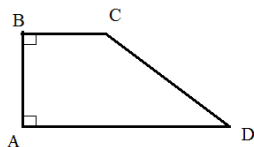
5) **Трапеция** – четырехугольник у которого две стороны параллельны (эти стороны называются основаниями, две другие – боковыми)



Равнобедренная трапеция – боковые стороны равны, углы при основаниях равны



Прямоугольная трапеция – одна из его сторон является высотой (угол между боковой стороной и основаниями 90°)

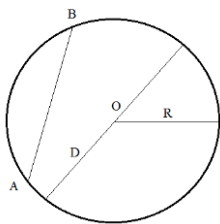


Сумма углов, лежащих при боковых сторонах равна 180 ($\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180$, т.к. они внутренние односторонние при параллельных основаниях)

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot H$$

Где H – высота трапеции, $\frac{AD+BC}{2}$ – средняя линия (соединяет середины боковых сторон)

- 6) **Окружность** – множество точек, равноудаленных от центра (это расстояние есть радиус окружности)



Хорда – отрезок, соединяющий две точки окружности

Если хорда проходит через центр то это **диаметр**

Диаметр в два раза больше радиуса

$$\pi = \frac{l}{d}$$

Смысл числа π : длина окружности всегда в π (≈ 3.14) раз больше своего диаметра

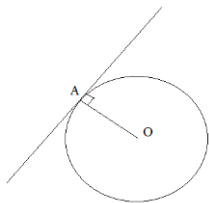
Так как $d=2r$, то

$$l = 2\pi r - \text{длина окружности}$$

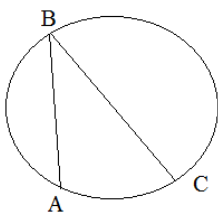
$$S = \pi r^2 - \text{площадь круга}$$

Касательная к окружности – прямая имеющая одну общую точку с окружностью

Теорема: касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания

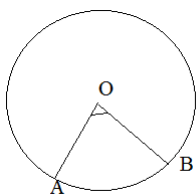


Вписанный угол – угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают ее



$\angle ABC$ – вписанный, опирается на дугу AC

Центральный угол – угол, вершина которого лежит в центре окружности

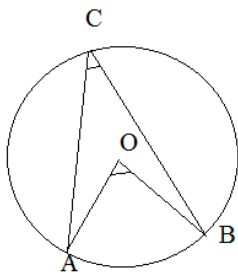


$\angle AOB$ – центральный, опирается на дугу AB.

Градусная мера дуги AB равна градусной мере $\angle AOB$

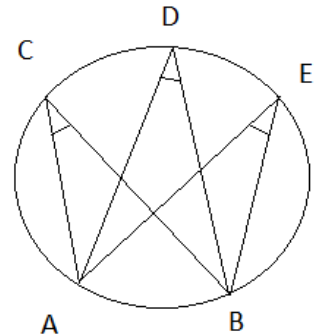
Теорема:

Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу

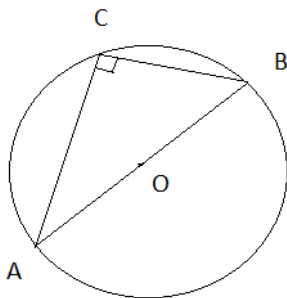


$$\angle AOB = 2 \angle ACB$$

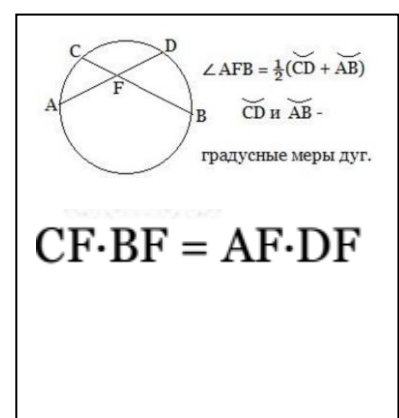
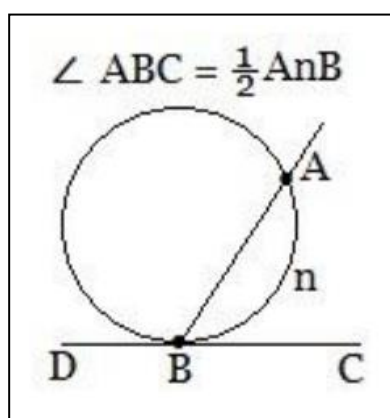
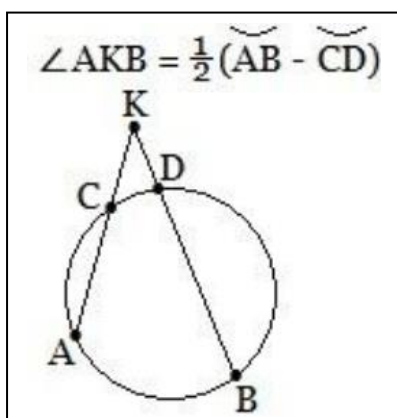
Следствия:



- 1) Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу - равны
 $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$ (т.к. все опираются на дугу AB)
- 2) Вписанный угол, опирающийся на диаметр равен 90

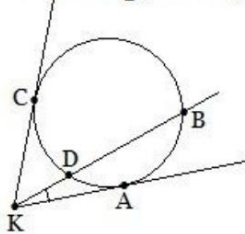


Важно! Центр окружности описанной около прямоугольного треугольника лежит на середине гипотенузы



$$\angle SKA = \frac{1}{2}(\widehat{CBA} - \widehat{CDA})$$

$$\angle BKA = \frac{1}{2}(\widehat{BA} - \widehat{DA})$$

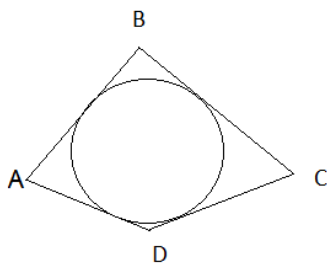


секущая, АК и СК – касательные.
АК=СК – отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны.

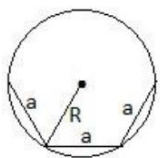
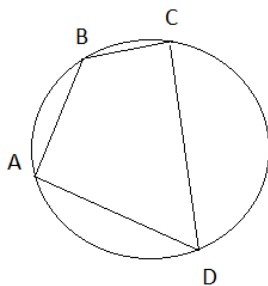
$$KB \cdot KD = AK^2$$

Произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной

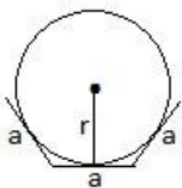
Окружность называется **вписанной** в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются окружности



Окружность называется **описанной** около многоугольника если все вершины многоугольника лежат на окружности

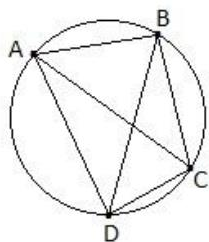


$$R_n = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}} \text{ радиус описанной окружности}$$



$$r_n = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}} \text{ радиус вписанной окружности}$$

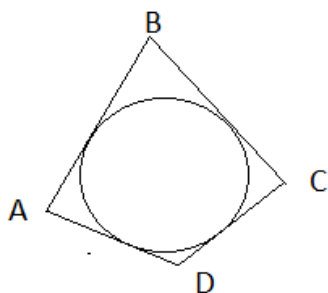
Важно! Если четырехугольник вписан в окружность то сумма его противоположных углов равна 180



$$\angle B + \angle D = \angle A + \angle C = 180$$

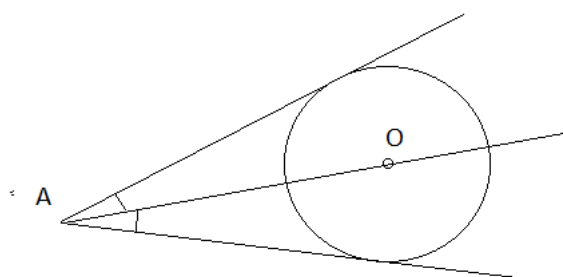
А еще: произведение диагоналей, равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея) $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$

Если четырехугольник описан около окружности, то сумма его противоположных сторон равна



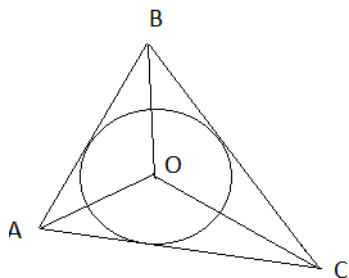
$$AB + DC = AD + BC$$

Если окружность вписана в угол, то через ее центр проходит биссектриса угла



АО – биссектриса

Важно! Центр вписанной в треугольник окружности – точка пересечения биссектрис

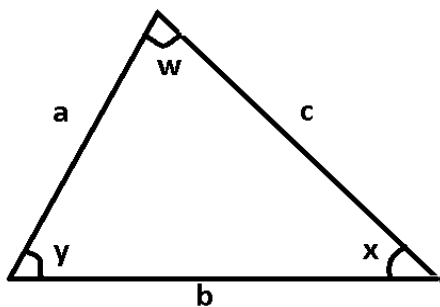


Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров

$$R = \frac{abc}{4S} - \text{радиус описанной около треугольника окружности}$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} - \text{радиус вписанной в треугольник окружности}$$

Где S – площадь треугольника, a, b, c – его стороны



Теорема косинусов

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb * \cos x$$

(квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними)

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin x} = \frac{b}{\sin w} = \frac{c}{\sin y} = 2R$$

Где R – радиус описанной окружности

Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}bc * \sin x$$

Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} - \text{полупериметр}$$